

基于整体最小二乘的椭圆拟合方法

熊风光,李 希,韩 燮

(中北大学 计算机与控制工程学院,山西 太原 030051)

摘 要: 针对传统椭圆拟合方法中存在的无法剔除噪声点并且参数误差较大的缺陷,提出了一种基于随机采样一致性、约束条件及整体最小二乘的椭圆拟合改进算法.该方法首先根据椭圆的性质,利用随机采样一致性剔除噪声点,再利用基于约束条件的整体最小二乘法,对去噪之后的数据进行椭圆拟合.实验证明,随机采样一致算法能很好地去除噪声,并且跟传统最小二乘法的拟合结果相比较可以看出,改进之后的拟合方法拟合出的椭圆参数精度更高.

关键词: 椭圆拟合; 噪声点; 随机采样一致; 约束条件; 整体最小二乘

中图分类号: TP301.6

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2017)01-0102-04

A Method of Ellipse Fitting Based on Total Least Squares

XIONG Feng-guang ,LI Xi, HAN Xie

(School of Computer and Control Engineering, North University of China, Taiyuan 030051,China)

Abstract: Considering the fact that the defects of failing to eliminate the noise and large errors existed in traditional ellipse fitting method, the improved method with the foundation of Random Sample Consensus (RANSAC), constraint condition and total least squares was proposed. The new method first use the Random Sample Consensus to eliminate the noise based on the property of ellipse, then the ellipse is fitted by the total least squares with constraint condition. The experimental results show that the RANSAC algorithm can effectively remove the noise of data. The new method has a higher precision on parameter of ellipse compared with the traditional least squares method.

Key words: ellipse fitting; noise data; RANSAC; constraint condition; total least squares

1 引言

二次曲线和曲面已被广泛应用于 CAD 和几何建模、计量学、计算机图形学、计算机视觉和模式识别等诸多方面^[1]. 椭圆作为二次曲线的一种,在生活中广泛存在,因此椭圆拟合也是值得广大学者研究的重要技术. Dingli Yang^[2] 等将椭圆拟合应用到双眼定位技术中,取得了很好的效果,双眼定位技术在面部表情识别、人机交互、人脸检测等方面都有着重要应用. 拟合的问题早已有解决方法,但是拟合方法的精确度也是人们不可忽视的,它对于识别性能有着重大影响^[3]. 针对传统最小二乘椭圆拟合的缺陷

和不足,本文提出了一种新的拟合方法.

2 最小二乘椭圆拟合方法

最小二乘法被广泛应用于各种拟合问题,它的原理是使得测量拟合误差的平方和最小化. 使用最小二乘拟合椭圆主要有两类方法:代数方法和几何方法,这两种方法是由误差距离的定义来区分的.

对于几何方法,根据拟合模型方程的系数判断几何结构,由此得到几何约束条件. 最小二乘法中误差距离是由给定点的几何特征来定义的正交距离或者最短距离. 对于代数方法,几何特征可由隐式方程 $F(x;a) = 0$ 描述出来,定义参数向量 $a = (a_1, \dots,$

a_q), 误差距离就可根据隐式方程及参数向量定义出来^[4]. 几何方法是非线性的, 因此在计算时需要迭代过程, 计算也较为复杂繁琐, 并且需要给定适当的初值, 否则会使结果不准确, 甚至无法计算出模型参数. 而代数方法则是线性的, 比较容易解算. 因此, 本文选择使用代数方法来对椭圆进行拟合.

椭圆作为二次曲线的一种特殊形式, 可以由一个二次方程来表示^[5].

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (1)$$

式中, a, b, c, d, e, f 代表椭圆的系数, (x, y) 表示点坐标.

求目标函数

$$F(a, b, c, d, e, f) =$$

$$\sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bxy_i + cy_i^2 + dx_i + ey_i + f)^2$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n$$

的最小值确定各个系数. 根据极值原理, 分别对各个系数求偏导, 即

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial F}{\partial b} = \frac{\partial F}{\partial c} = \frac{\partial F}{\partial d} = \frac{\partial F}{\partial e} = \frac{\partial F}{\partial f} = 0$$

展开得到

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n 2x^2(ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f) = 0 \\ \sum_{i=1}^n 2y^2(ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f) = 0 \\ \sum_{i=1}^n 2xy(ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f) = 0 \\ \sum_{i=1}^n 2x(ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f) = 0 \\ \sum_{i=1}^n 2y(ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f) = 0 \\ \sum_{i=1}^n 2(ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f) = 0 \end{cases}$$

不难发现, 上式是一个线性齐次方程组, 为了防止出现零解, 需要增加约束条件^[6].

根据二次曲线理论, $I_1 = a + c$ 是二次曲线的一个不变量, 而对于椭圆, 恒有 $a + c \neq 0$, 因此, 约束条件可以设为 $a + c = 1$. 将 $a + c = 1$ 代入式(1)中, 得到

$$\begin{aligned} f(x, y) &= ax^2 + bxy + (1-a)y^2 + dx + ey + f \\ &= a(x^2 - y^2) + bxy + y^2 + dx + ey + f = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

目标函数就变为

$$F(a, b, d, e, f) = \sum_{i=1}^n (a(x_i^2 - y_i^2) + bxy_i + y_i^2 + dx_i + ey_i + f)^2$$

分别对 a, b, d, e, f 求偏导, 并使得导数等于零, 联立方程组, 就能得到五个模型参数的值.

3 基于 RANSAC 和整体最小二乘的椭圆拟合算法

直接使用传统最小二乘法拟合椭圆虽然简单易行, 但是却容易产生误差, 使得模型参数不准确^[7]. 因此, 本文先采用 RANSAC 算法去除噪声点, 再利用能使得拟合误差减小的整体最小二乘法对处理之后的点数据进行拟合.

3.1 利用 RANSAC 去噪

利用 RANSAC 算法, 可以从实验数据中筛选出局内点, 局内点就是符合“最佳模型”的点, 局内点以及它们对应的模型可以通过不断从输入点集中采样得到, 采样过程因其随机性使得每个点被选中的概率相同. RANSAC 算法因为简单可行以及对局外点的鲁棒性而得到广泛应用^[8]. 本文中利用 RANSAC 去除噪声点的步骤如下.

(1) 利用椭圆的定义, 即一动点 P 到两定点 F_1, F_2 之间的距离是一常数, 其中 P 是椭圆上的点, F_1, F_2 是椭圆的两个焦点. 那么就可以先随机选取三个点, 构造一个椭圆模型, 假定其中一个点为椭圆上的点 A , 其余两个点为焦点 F_1, F_2 . 计算点 A 到两个焦点 F_1, F_2 之间的距离之和 D .

(2) 分别计算样本数据中各个点到 F_1, F_2 之间的距离之和 $d_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 计算 $z_i = |D - d_i|$ 的值.

$$(3) \text{ 取 } \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}{n-1}}, \text{ 其中 } \bar{z} =$$

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$, 如果 $z_i \geq 0.8\sigma$, 则判定为噪声点, 删除; 反之, 则认为该点为非噪声点, 即局内点, 保留.

(4) 重复上述步骤 k 次, 计算每次得到的局内点的数目, 点数最多时即为最佳椭圆模型.

迭代次数 k 可由 RANSAC 算法的性质推导得到. 假设 p 代表迭代过程中从样本数据中随机选择的点均为局内点的概率, w 为每次从样本数据中选取出来一个局内点的概率, 即 $w = \text{有效点的数目} / \text{数据点总数}$. 若每次需要随机选取 n 个点, 那么

$(1-w^n)^k$ 就表示 n 个点都不是局内点的概率. 所以就有 $1-p = (1-w^n)^k$, 则 $k = \frac{\lg(1-p)}{\lg(1-w^n)}$, 一般情况下, p 取 99%.

3.2 整体最小二乘

最小二乘忽略了系数矩阵中的误差, 在解算含误差模型时会使得模型参数的精确度不高. 整体最小二乘将所有变量的误差考虑在内, 并使得所有变量的误差改正数的平方和最小, 这样计算出来的模型参数精度更高. 作为最小二乘的延伸, 由于其精确性, 整体最小二乘得到了较为广泛的应用^[9]. 本文根据整体最小二乘的原理, 对数据进行椭圆拟合.

将式(2) 改写为

$$x^2 - y^2 = -y^2/a - bxy/a - dx/a - ey/a - f/a \quad (3)$$

令 $-1/a = m$, $-b/a = n$, $-d/a = t$, $-e/a = p$, $-f/a = q$.

则式(3) 可以写成

$$x^2 - y^2 = my^2 + nxy + tx + py + q$$

设数据点坐标为 (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, 设参数近似值为 m_0, n_0, t_0, p_0, q_0 , x, y 的误差改正数分别为 v_{xi}, v_{yi} , 参数误差分别为 $\delta_m, \delta_n, \delta_t, \delta_p, \delta_q$. 式(3) 改写成

$$\begin{aligned} (x_i + v_{xi})^2 - (y_i + v_{yi})^2 = \\ (m_0 + \delta_m)(y_i + v_{yi})^2 + \\ (n_0 + \delta_n)(x_i + v_{xi})(y_i + v_{yi}) + \\ (t_0 + \delta_t)(x_i + v_{xi}) + (p_0 + \delta_p) \\ (y_i + v_{yi}) + q + \delta q \end{aligned} \quad (4)$$

将式(4) 展开并舍去二次项, 得到

$$\begin{aligned} (2x_i - n_0y_i - t_0)v_{xi} - \\ (2y_i + 2m_0y_i + n_0x_i + p_0)v_{yi} = \\ y_i^2\delta_m + x_iy_i\delta_n + x_i\delta_t + y_i\delta_p + \delta_q - L_i \end{aligned} \quad (5)$$

式中,

$$\begin{aligned} L_i = x_i^2 - y_i^2 - m_0y_i^2 - n_0x_iy_i - \\ t_0x_i - p_0y_i - q_0 \end{aligned}$$

将式(5) 写成矩阵形式:

$$\mathbf{A} \delta \mathbf{B} = \mathbf{L} + \mathbf{V} \quad (6)$$

式中,

$$\mathbf{A}_{n,5} = \begin{bmatrix} y_1^2 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & x_2y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n^2 & x_ny_n & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix},$$

$$\delta \mathbf{B}_{5,1} = \begin{bmatrix} \delta_m \\ \delta_n \\ \delta_t \\ \delta_p \\ \delta_q \end{bmatrix}, \mathbf{L}_{n,1} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}, \mathbf{V}_{n,1} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$v_i = (2x_i - n_0y_i - t_0)v_{xi} -$$

$$(2y_i + 2m_0y_i + n_0x_i + p_0)v_{yi}, i = 1, 2, \dots, n.$$

假设样本数据中每个点的精度都相同, 则由整体最小二乘法

$$\sum_{i=1}^n v_{xi} + v_{yi} \rightarrow \min,$$

可以得到

$$\delta \mathbf{B} = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_v^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_v^{-1} \mathbf{L} \quad (7)$$

式中,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_v = \text{diag}((2x_1 - n_0y_1 - t_0)^2 - \\ (2y_1 + 2m_0y_1 + n_0x_1 + p_0)^2, \\ \dots, (2x_n - n_0y_n - t_0)^2 - \\ (2y_n + 2m_0y_n + n_0x_n + p_0)^2) \end{aligned} \quad (8)$$

模型参数估值协方差矩阵为

$$\mathbf{Q}_B = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_v^{-1} \mathbf{A})^{-1} \quad (9)$$

3.3 整体最小二乘解算原理

整体最小二乘的数学模型为

$$(\mathbf{A}_{n,m} + \mathbf{E}_A) \mathbf{B}_{n,m} = \mathbf{Y}_{n,1} + \mathbf{E}_Y \quad (10)$$

式中, $\mathbf{E}_A$ 为矩阵 $\mathbf{A}$ 的误差, $\mathbf{E}_Y$ 为矩阵 $\mathbf{Y}$ 的误差, $\mathbf{B}$ 为待求参数矩阵.

用 SVD 分解法求解矩阵方程

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{V}^T = \mathbf{U}_1 \Sigma \mathbf{V}^T$$

$$\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ 1 \end{matrix}, \mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sum 1 & 0 \\ 0 & \sum 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ 1 \end{matrix}$$

由此得到模型参数估值为

$$\mathbf{B} = -\mathbf{V}_{12} \mathbf{V}_{22}^{-1} \quad (11)$$

4 实验结果及分析

为了验证本文中算法的可行性及鲁棒性, 用 Matlab2014a 做仿真实验.

首先验证 RANSAC 算法去除噪声点的效果, 定义一个椭圆, 中心坐标为 $(0, 0)$, 其长半轴为 10,

短半轴为 5, 偏角为 60° , 数据点总数为 500, 加入 $\sigma = 0.4$ 的高斯噪声, 用本文方法去除噪声点, 再用最小二乘法拟合, 实验结果如图 1 所示。

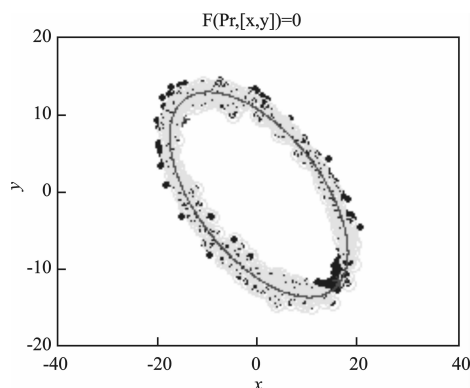


图1 RANSAC 算法去噪效果

从图 1 中可以看出, RANSAC 算法能够很好地剔除噪声点, 最后剩余的局内点基本上都符合椭圆模型, 拟合出的椭圆曲线比较平滑。

为了说明本方法的优越性, 分别使用最小二乘法和本文方法对相同点云数据进行椭圆拟合。输入点云总数为 800, 高斯噪声为 $\sigma = 0.1$, 椭圆的中心坐标为 (10, 13), 长半轴长度为 6, 短半轴长度为 3, 偏角为 30° 。实验结果如图 2 所示。

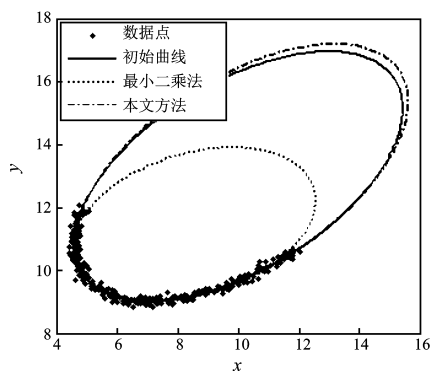


图2 最小二乘法和本文方法拟合椭圆的比较

从图 2 可以看出, 用最小二乘法拟合出的椭圆与设定的曲线偏差较大, 已有很大失真, 而用本文方法拟合出的椭圆基本与设定的初始曲线相吻合, 验证了基于 RANSAC 和整体最小二乘的椭圆拟合方法的可行性。

5 结束语

由于通常采集到的点数据中会因为设备或者环境因素等存在噪声, 而且最小二乘法因其自身的计算方法会使计算结果不够精确, 因此本文提出了一种在 RANSAC 算法、约束条件、及整体最小二乘法

基础上的椭圆拟合方法。根据椭圆的定义, 利用随机采样一致性识别噪声点, 整体最小二乘法的将各个变量及参数误差都考虑在内的准则使得拟合出的椭圆参数精度更高。实验结果证明该方法可以弱化噪声对拟合结果的影响, 并且拟合出的椭圆基本符合最佳模型的设定。

参考文献:

- [1] Wang Jun , Yu Zeyun . Quadratic curve and surface fitting via squared distance minimization [J]. Computer&Graphics, 2011(35):1035-1050.
- [2] Yang Dingli , Bai Qiuchan , Zhang Yulin , et al. Eye location based on hough transform and direct least square ellipse fitting[J]. Journal of Software, 2014, 9 (2):319-323.
- [3] Zhang C, Sun C , Vallotton P, et al. Automatic nuclear bud detection using ellipse fitting, moving sticks or top-hat transformation[J]. Journal of Microscopy , 2013, 252(2):122-134.
- [4] Kurt O , Arslan O . Geometric Interpretation and precision analysis of algebraic ellipse fitting using least squares method[J]. Acta Geod. Geoph. Hung, 2012, 47 (4):430-440.
- [5] Mitchell D R G, Berg J A Van den . Development of an ellipse fitting method with which to analyse selected area electron diffraction patterns[J]. Ultramicroscopy, 2016, 160:140-145.
- [6] Levente Hunyadi • István Vajk. Constrained quadratic errors-in-variables fitting [J]. Visual Computer, 2014, 30:1347-1358.
- [7] 马向南, 李航, 刘丽丽, 等. 最小二乘改进算法及其在椭圆拟合中的应用[J]. 河南科技大学学报(自然科学版), 2014, 35(3):18-21.
- [8] Lmre Evren, Hilton Adrian. Order statistics of RANSAC and their practical application[J]. International Journaln of Computer Vision, 2015, 111(3):276-297.
- [9] 杨仕平. 整体最小二乘理论及其在变形监测中的应用研究[D]. 成都:西南交通大学, 2013.

作者简介:

熊风光 男, (1979-), 博士研究生, 讲师. 研究方向为软件技术, 虚拟现实。

李 希(通讯作者) 女, (1991-), 硕士研究生. 研究方向为仿真与可视化. E-mail: 154740129@qq.com.

韩 雯 女, (1964-), 博士, 教授. 研究方向为仿真与可视化、智能信息处理。